Mejorando la preparación de los profesores a través de sus cursos de matemáticas avanzado

Nick Wasserman (Teachers College, Columbia University)

Pontificia Universidad Catolica, Santiago, Chile

22 Junio 2022

TEACHERS COLLEGE
COLUMBIA UNIVERSITY

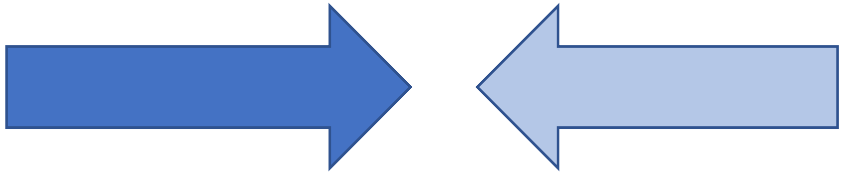
Esquema presentación

- El problema
- Literatura de formación de profesores de secundaria
- Un enfoque instruccional novedoso en Matemáticas avanzadas
  - 3 formas en que este enfoque trató de impulsar la formacion de profesores a traves de sus cursos matematicas
    - Algunos ejemplos
    - Resultados de algunos investigaciones

El problema

Formación de profesores de secundaria

- **Tensión** en la formación del profesorado de secundaria:
  - Por un lado, los profesores de matemáticas de secundaria necesitan un conocimiento suficientemente profundo y sólido de las matemáticas (por ejemplo, conocimiento del contenido)
  - Por otro lado, las ideas estrictamente matemáticas no son el único aspecto para el que los profesores de secundaria necesitan preparación (por ejemplo, conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido pedagógico)



¿Qué matemáticas deben incluirse?¿Cómo?

Formación de profesores de secundaria

- En el nivel pregrado, los futuros profesores de educación media deben tener estudios superiores en áreas de contenidos específicas...
  - Profesores de ciencias estudios en ciencias
  - Profesores de historia estudios en historia
  - Profesores de matemáticas estudios en matemáticas
- **Pregunta motivadora:**
  - ¿Qué gana un profesor de biología de 2o medio al estudiar neurobiología?
  - ¿Qué gana un profesor de física al estudiar mecánica cuántica?
  - **¿Qué gana un profesor de matemáticas de 1o medio al estudiar álgebra abstracta? O analisis real?**

Formación de profesores de secundaria

- Es relativamente *fácil* encontrar conexiones matemáticas...
  - Adición y multiplicación de números reales es un cuerpo, **$(\mathbb{R},+,\cdot)$.** Por ejemplo, 5+-3.
  - Composición con funciones invertibles es un grupo, **$(F,\circ)$.** Por ejemplo $f \circ f^{-1}(x)$.
- La pregunta *más difícil* es, ¿cómo cambia la enseñanza ese conocimiento?
  - ¿Cambia la forma en que los maestros enseñan a los estudiantes a sumar 5+-3?
    - ¿Queremos que se construyan a partir de propiedades, por ejemplo, si 5+-3=x, entonces (5+-3)+3=x+3, etc.?
  - ¿Cambia la forma en que los maestros enseñan a los estudiantes sobre funciones inversas $f^{-1}(x)$?
    - ¿Deberían comenzar desde las propiedades de los grupos, por ejemplo, $f \circ f^{-1}(x)=x$?
- ¿Cuál es el propósito de los futuros profesores de secundaria con otros temas de álgebra abstracta, como el teorema de Lagrange?

Formación de profesores de secundaria

- Según la literatura, los cursos de matemáticas avanzadas **no parecen ser útiles** en la preparación matemática para los profesores de secundaria.
  - Monk (1994): el modelo "punto de corte" para el número de cursos universitarios y el desempeño de sus estudiantes: los cursos más allá de un quinto curso de pregrado tuvieron poco o ningún efecto positivo.
  - Zazkis y Leikin (2010): muy pocos profesores de secundaria pudieron identificar formas significativas en las que el conocimiento de las matemáticas avanzadas había influido en su enseñanza.
- Lo que los maestros han encontrado útil de tales cursos **probablemente no sean los objetivos "planificados"**
  - "Transportar" actividades específicas para ser utilizadas como enriquecimiento (Wasserman et al., 2018)
  - Recordar a los profesores cómo se sentía aprender – que es dificil a aprender las matematics (desarrollar rasgos afectivos como la empatía) (Even, 2011; Zazkis & Leikin, 2010).

Formación de profesores de secundaria

- **Pregunta impulsora:** ¿Existen formas de impartir cursos avanzados de matemáticas que puedan mejorar la preparación de los profesores de secundaria?

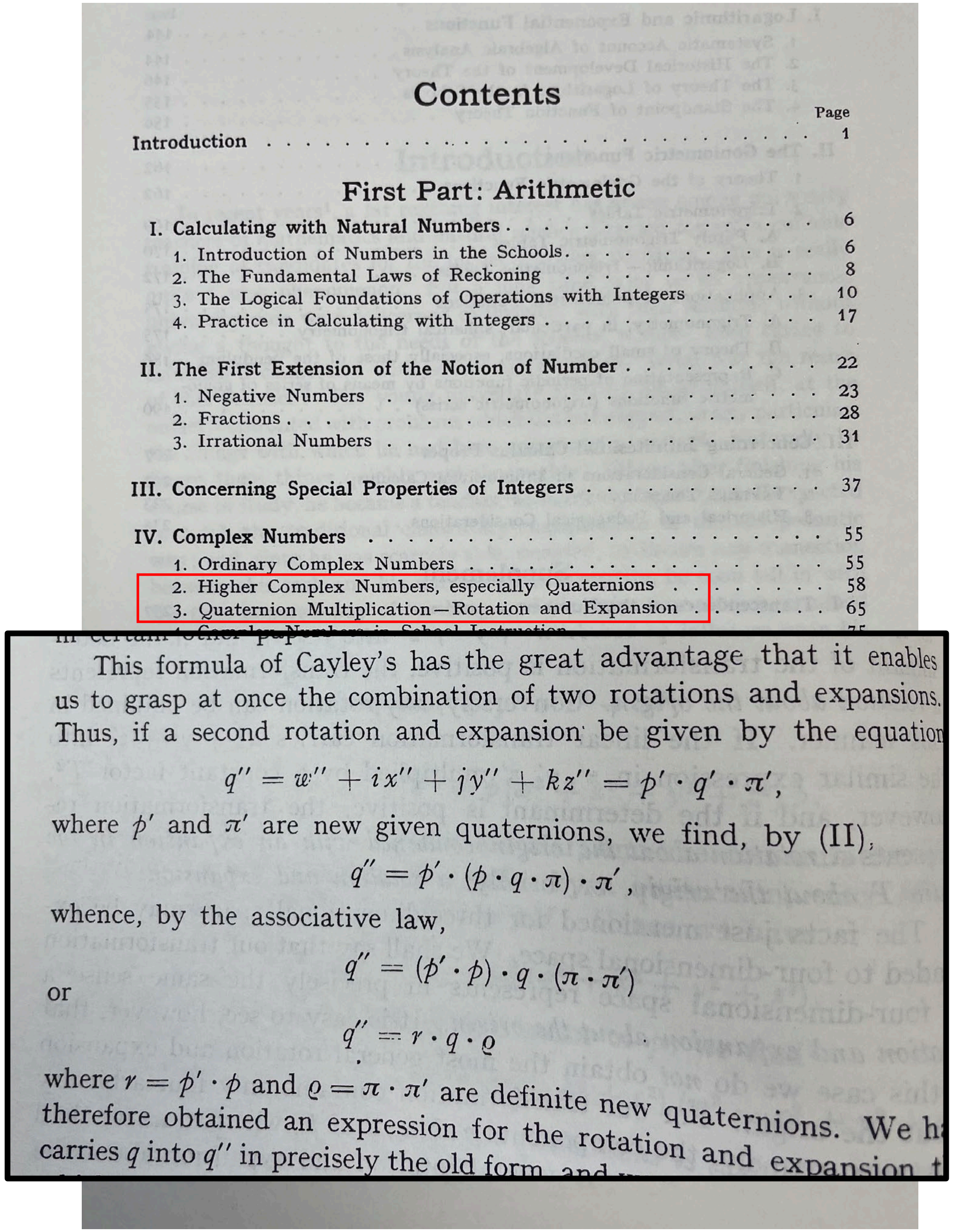
Literatura de Educación del profesorado de secundaria

Enfocándose en cursos avanzados de matemáticas.

Advanced Mathematics

- Felix Klein (1932)
  - *"Doble discontinuidad"*
  - *"Matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado"*
    - Identifica las conexiones de contenido
    - Use matemáticas secundarias para explorar matemáticas avanzadas

PUNTO CLAVE: Los enfoques en los cursos de matemáticas avanzadas han tendido a permanecer en el ámbito matemático, explorando las conexiones matemáticas en el contenido.



Contents

This formula of Cayley's has the great advantage that it enables us to grasp at once the combination of two rotations and expansions. Thus, if a second rotation and expansion be given by the equation

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot q' \cdot \pi',$$

where p' and π' are new given quaternions, we find, by (II),

$$q'' = p' \cdot (p \cdot q \cdot \pi) \cdot \pi',$$

whence, by the associative law,

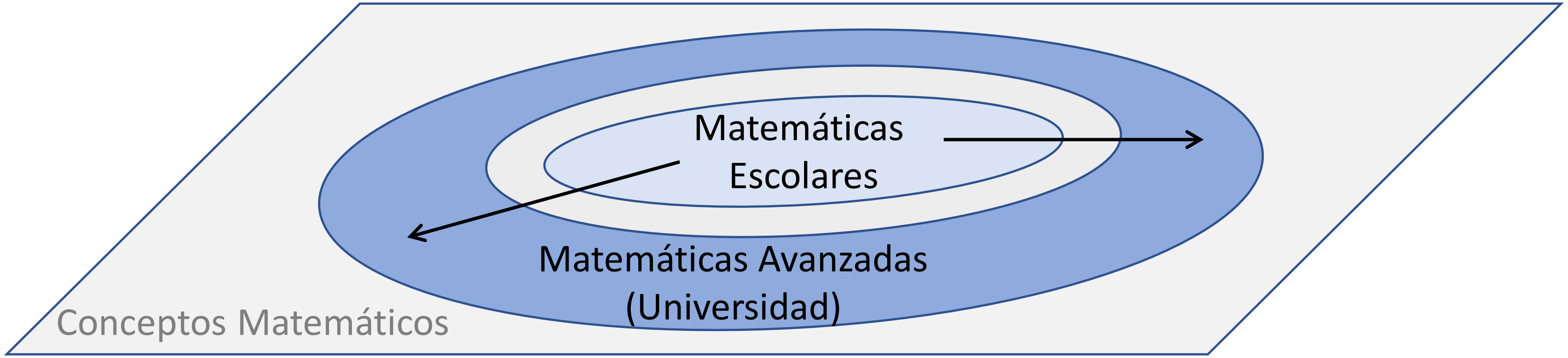
$$q'' = (p' \cdot p) \cdot q \cdot (\pi \cdot \pi')$$

or

$$q'' = r \cdot q \cdot \varrho$$

where $r = p' \cdot p$ and $\varrho = \pi \cdot \pi'$ are definite new quaternions. We h[...] therefore obtained an expression for the rotation and expansion t[...] carries q into q'' in precisely the old form and [...]

Plano Matemático



Conocimiento del profesor

- Conocimiento Matemático para la Enseñanza

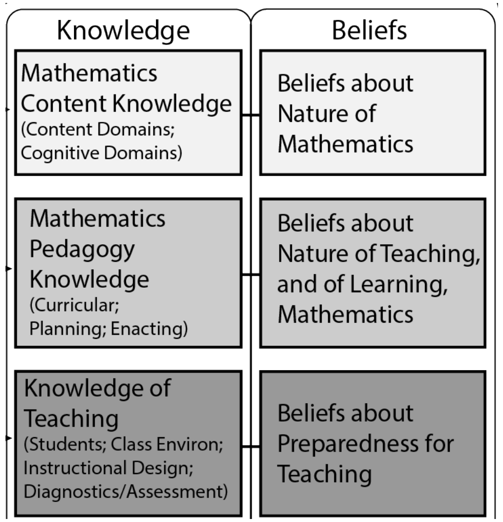
[Uso este término no para referirme a un modelo particular de dicho conocimiento (por ejemplo, MKT), sino a una idea general]

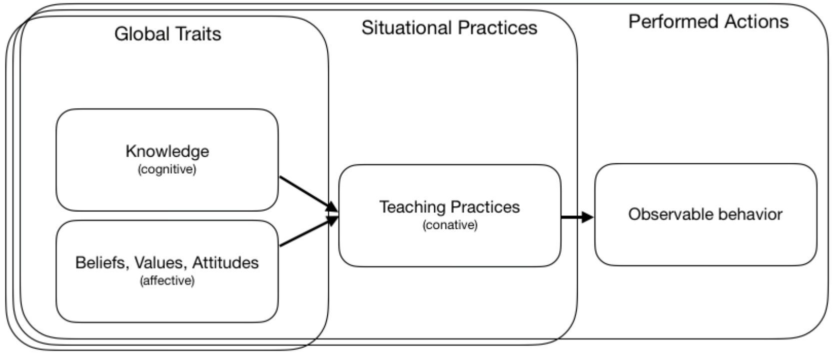
  - Las ideas matemáticas que los profesores necesitan saber son aquellas que se utilizan durante las actividades que realizan mientras enseñan.
  - Este tipo de conocimiento matemático es el más relevante para el aprendizaje matemático de los profesores de secundaria: el tipo que se puede aplicar o conectar fácilmente con la enseñanza.

- Para que los cursos universitarios de matemáticas sean útiles en la preparación de los docentes, es necesario que ayuden a formar este tipo de conocimiento

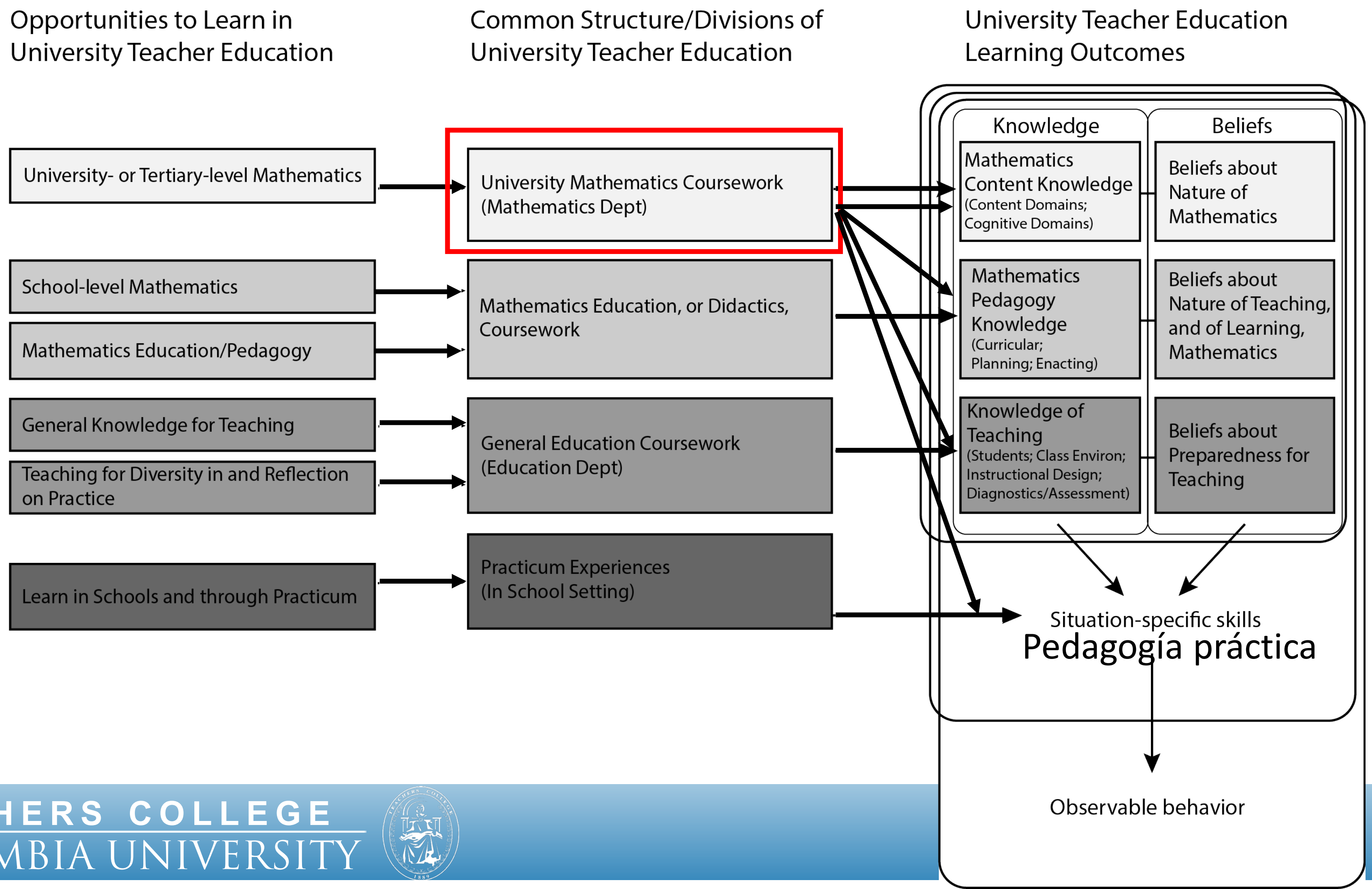
Formación docente y sus objetivos

- El Estudio de Formación y Desarrollo Docente en Matemáticas (TEDS-M, por su sigla en inglés) (Tatto et al., 2008) fue una encuesta internacional sobre la formación docente.
- Resultados deseados de la formación docente
  - Conocimientos: i) Matemáticas; ii) Pedagogía Matemática; iii) Pedagogía General
  - Creencias: i) Matemáticas; ii) Pedagogía Matemática ; iii) Pedagogía General.
- El modelo de competencia docente de Blomeke et al. (2015) sugiere que las acciones del docente son una función de (i) conocimientos y creencias (ver arriba) y (ii) habilidades situacionales, similar a lo que Schmidt et al. (2008) llamaron Pedagogía Práctica. Es decir, se trata de cómo influir en la enseñanza de los docentes.





Oportunidades y estructura de la formación docente



- ¿Enfoque de "divide y vencerás"?
- Centrándose en cursos universitarios de matemáticas, pero con un enfoque más "integrado"

Un enfoque instruccional novedoso

Diseño de módulos para un curso de análisis real [ULTRA]

ULTRA

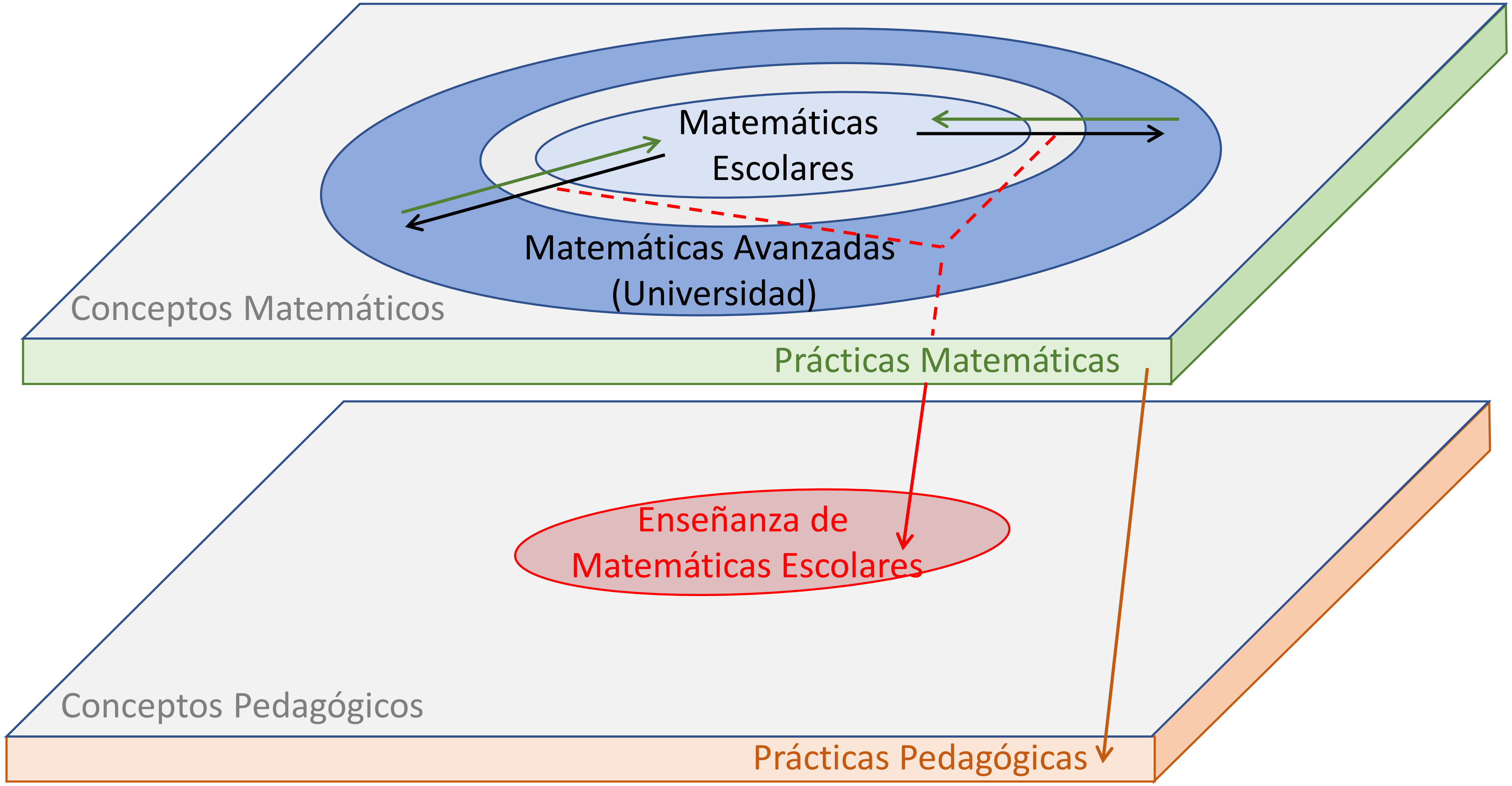
- Un proyecto colaborativo financiado por la NSF (Actualización del aprendizaje para profesores en análisis real, ULTRA por sus siglas en inglés) rediseñó un curso de análisis real con profesores de matemáticas de secundaria
  - Keith Weber, Pablo Mejia-Ramos, Ruby Quea (Rutgers University)
  - Tim Fukawa-Connelly (Temple University)
  - Nick Wasserman, William McGuffey (Teachers College, Columbia University)
- Enfoque "modular": hacemos conexiones con la enseñanza en *algunos* momentos del curso

[Otra gente también se han dedicado a diseñar módulos, e.g., META Math, MODULES^2]

ULTRA

- El enfoque instructivo para ULTRA impulse de tres formas la preparación de los maestros a través de cursos de matemáticas avanzadas:
  - Conectando con la enseñanza
  - Conexiones matemáticas invertidas
  - Prácticas pedagógicas matemáticas

ULTRA



Matemáticas
Escolares
Matemáticas Avanzadas
(Universidad)
Conceptos Matemáticos
Prácticas Matemáticas
Enseñanza de
Matemáticas Escolares
Conceptos Pedagógicos
Prácticas Pedagógicas

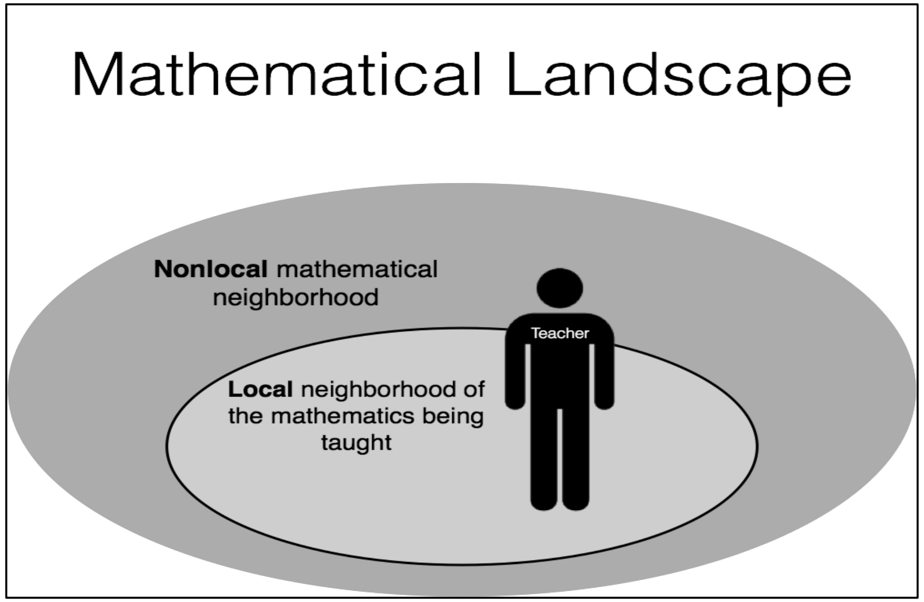
1: Conectando con la enseñanza

Modelo instruccional ULTRA: Sube desde y bajar a la práctica (de la enseñanza)

Wasserman, N. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *Journal of Mathematical Behavior, 49*(1), 116-128.

Conectando con la enseñanza

- Hay un desafío único de los cursos avanzados de matemáticas en la formación docente: las ideas matemáticas no se discuten explícitamente con los estudiantes de secundaria
- Wasserman's (2018) "Conocimiento de las Matemáticas *No-locales* para la Ensenanza":



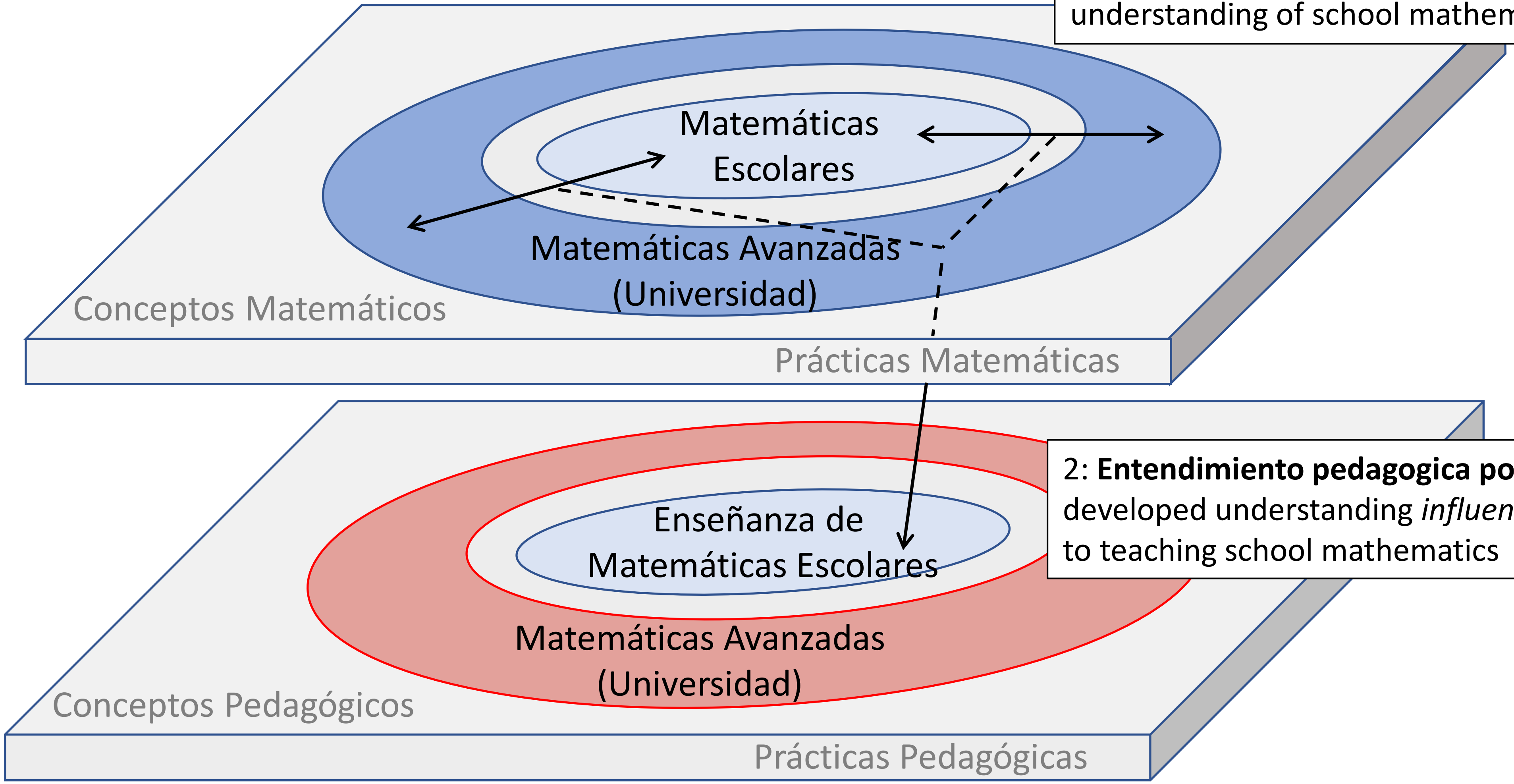
Se adaptó el modelo cognitivo de Silverman & Thompson (2008) para que el conocimiento para la enseñanza sea específico para cursos avanzados:

1. Las Matemáticas no locales deben servir como "entendimiento matemática poderosa", remodelando el conocimiento de las matemáticas secundarias locales (Matemáticas)
2. Debe haber implicaciones para la enseñanza, una "entendimiento pedagógica poderosa" (Pedagogía práctica)

Conectando con la enseñanza

Wasserman (2018) – conocimiento de las mátematicas no-locales para la ensenanza

1: **Entendimiento matematica poderoso**: the university mathematics *reshapes* one's understanding of school mathematics

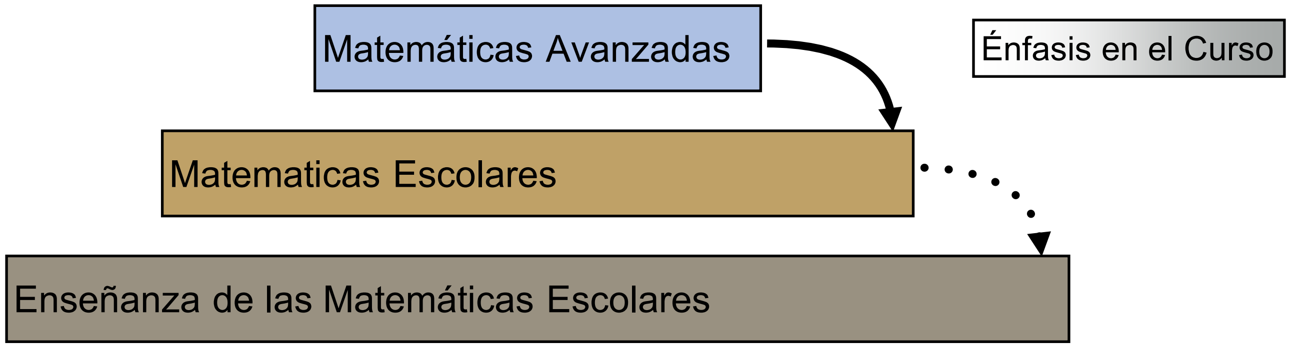


2: **Entendimiento pedagogica poderoso**: newly developed understanding *influences* approach to teaching school mathematics

Modelo Instruccional

Modelo Tradicional

"Si algo, haz conexiones con las matemáticas escolares"



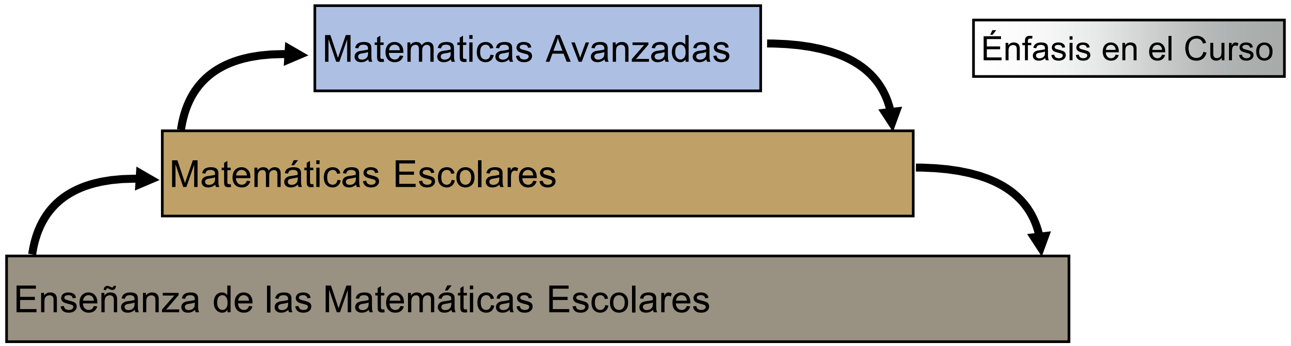
Efecto de cascada: la esperanza implícito es que el resultado del aprendizaje de las matemáticas avanzadas será una respuesta distinta en situaciones pedagógicas futuras.

Modelo Instruccional

Wasserman, N., Weber, K., & McGuffey, W. (2017). Leveraging real analysis to foster pedagogical practices. In A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, and S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)* (pp. 1-15). San Diego, CA: RUME.

Modelo Alternativo

'Subir' desde, y 'Bajar' a, la práctica de la enseñanza



Comienza con situaciones de enseñanza, donde ciertas ideas pedagógicas se puede aprender a través de las matemáticas avanzadas.

ULTRA Módulo 3

Teoremas algebraicos de límite para sucesiones

Módulo 3: Resumen

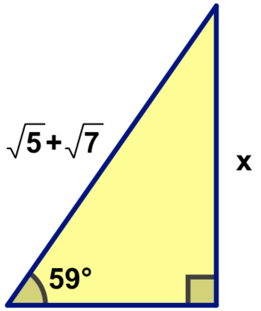
- Demostraciones de los Teoremas de Álgebra de Límites para Sucesiones.
- Si $(a_n) \to a$, y $(b_n) \to b$, entonces:
  - i) $(ca_n) \to ca$, *para todo c en R*; (propiedad escalar)
  - ii) **$(a_n+b_n) \to a+b$; (propiedad de la suma)**
  - iii) **$(a_nb_n) \to ab$; (propiedad del producto)**
  - iv) $(a_n/b_n) \to a/b$, *siempre que b no sea 0.* (cuociente)

Subir desde la práctica

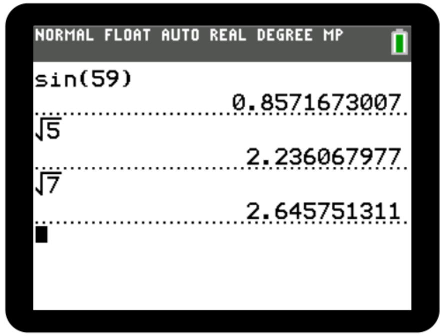
Respuesta conjeturada:
- Di al estudiante otra vez a esperar al fin para redondear
- Pero esto sería contra una objetiva pedagógica – esa "regla" no tiene ninguna justificación

Situaciones Pedagógicas: 'Redondeo'

Juan propone y resuelve la ecuación:



$$\sin(59^\circ) = \frac{x}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$
$$0.86 = \frac{x}{2.24+2.65}$$
$$4.89 \cdot 0.86 = \frac{x}{\cancel{4.89}} \cdot \cancel{4.89}$$
$$4.2 = x$$

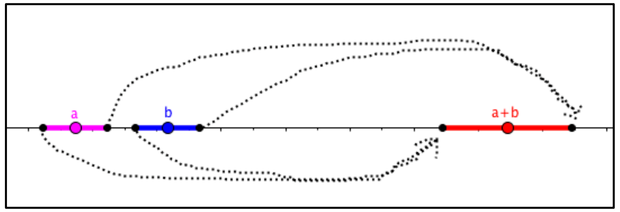


El profesor le dice, "Recuerda, no redondees en medio de un problema, espera al final."

Juan protesta y dice, "Bueno, mi respuesta es básicamente la misma de Verónica (que es 4.18), y ella redondeó al final. Y yo terminé primero y entendí mejor mi procedimiento".

Piense: ¿Cómo responderías a Juan?

Demostración 1



If $a_n \to a$, and $b_n \to b$, then:

ii. $a_n + b_n \to a + b$

Proof. Let $\varepsilon > 0$. For all n, $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|$,

so $\boxed{|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|.}$

Since $a_n \to a$, there exists an N_1 such that for all $n \ge N_1$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Since $b_n \to b$, there exists an N_2 such that for all $n \ge N_2$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Therefore, for $n \ge \max[N_1, N_2]$, $|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

So for any $\varepsilon > 0$, the sequence $(a_n + b_n)$ is within ε of $(a + b)$ (for $n \ge \max[N_1, N_2]$). QED.

EL ERROR EN SUMA *NO ES PEOR QUE* LA SUMA DE DOS ERRORES ORIGINALES ($e_{a+b} = e_a + e_b$)

Demostración 2

If $a_n \to a$, and $b_n \to b$, then:

iii. $a_n b_n \to ab$

Proof. Let $\varepsilon > 0$. For all n, $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \le |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab|$,

so $\boxed{|a_n b_n - ab| \le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|}$.

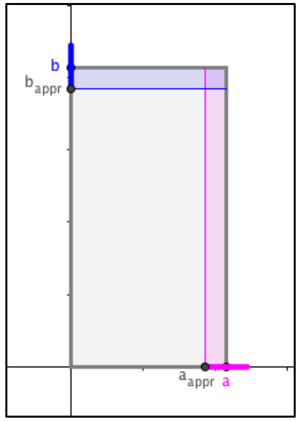
Since $b_n \to b$, there exists an N_2 such that for all $n \ge N_2$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$.

Since every convergent sequence is bounded, there is an M such that for all n, $|b_n| \le M$.

Since $a_n \to a$, there exists an N_1 such that for all $n \ge N_1$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|M|}$.

Therefore, for $n \ge \max[N_1, N_2]$, $|a_n b_n - ab| \le |M||a_n - a| + |a||b_n - b| < |M|\frac{\varepsilon}{2|M|} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$.

So for any $\varepsilon > 0$, the sequence $(a_n b_n)$ is within ε of ab (for $n \ge \max[N_1, N_2]$). QED.



Asumiendo $B>0$, B_{APPR} IS "Truncado", y dos errores originales son iguales, entonces:

EL ERROR EN EL PRODUCTO NO ES PEOR QUE EL ERROR ORIGINAL ESCALADO POR (|A|+|B|) $(e_{ab} \approx |b| \cdot e_a + |a| \cdot e_b)$

Error acumulativo

Respuesta aplicada:

- Genere un ejemplo en el que el error al usar el enfoque de redondeo de los estudiantes sería grande
- Esto se alinea con el objetivo pedagógico: el "problema especial" se utiliza para ejemplificar algunas de las limitaciones del enfoque original de los estudiantes.

Situación pedagógica: ‘Ejemplificar’

¿Puedes elaborar un ejemplo, es decir, modificar el problema, para ayudar a ejemplificar/mostrar al estudiante algunos de los posibles problemas con el enfoque?

Problema inicial

$$\sin(59°) = \frac{X}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

El error original crece hasta 0.01(~6.6)≈0.066

Problema modificado

$$\sin(59°) = \frac{X}{360\sqrt{5}}$$

≈ 804.98

$0.85 \times 804.98 \approx X$

El error original crece hasta 0.01(~805.84)≈8.0584

Puntos Claves

Wasserman, N., & Weber, K. (2017). Pedagogical applications from real analysis for secondary mathematics teachers. *For the Learning of Mathematics, 37*(3), 14-18.

- Las ideas matemáticas clave provenían del análisis real (por ejemplo, *demostraciones* de límites algebraicos)
  - "Entendimiento matemático poderoso" reformulación de la comprensión de las matemáticas escolares (acumulación del error)
- Las ideas matemáticas fueron *aplicadas* a la enseñanza (reaccionar al trabajo de los estudiantes)
  - Las ideas del análisis sirvieron como un "entendimiento pedagógico poderoso" (ejemplificación del error)
- Las ideas del Analisis Real no fueron *enseñadas* a los estudiantes; fue el profesor quien las *aplicó* en el trabajo.

Investigación

Fukawa-Connelly, T., Mejia-Ramos, J. P., Wasserman, N., & Weber, K. (2020). An evaluation of ULTRA: An experimental real analysis course built on a transformative theoretical model. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(2), 159-185.

- Fukawa-Connelly et al. (2020):
  - Dio el curso ULTRA en 2 instituciones
  - Evaluaciones de fin de curso de n=26 estudiantes (15 de uno, 11 de otro)
    - 5 problemas
    - Q1: Demostración de un teorema de algebra de límite
  - Entrevistas de fin de curso con n=10 estudiantes (5 de cada institución) utilizando entrevistas basadas en tareas
    - 3 Escenarios de enseñanza (similares, pero no iguales, a uno discutido en el curso)
      - S1: Acumulación de errores
    - Se les preguntó cómo responderían como maestros y por qué; También dio ideas matemáticas relevantes del curso y preguntó cómo se relacionaban y si podrían ser útiles.

Hallazgos

Fukawa-Connelly, T., Mejia-Ramos, J. P., Wasserman, N., & Weber, K. (2020). An evaluation of ULTRA: An experimental real analysis course built on a transformative theoretical model. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(2), 159-185.

- Fukawa-Connelly et al. (2020):
  - **Reclamacion: más profesores en formación/en servicio (PISTs, por sus siglas en inglés) pudieron aplicar conocimientos matemáticos en contextos aplicados a la enseñanza que en un entorno de análisis descontextualizado.**
    - Específicamente con los teoremas de álgebra de límite:
      - En problema sobre redondeo en cálculos de perímetro/área, PIST aplicaron con éxito las ideas de la demostración (9 de 10)
      - En la demostración de análisis real sobre los teoremas del límite algebraico, los PISTs lucharon más (9 de 26)

"Si estos tienen una desviación de como máximo una décima parte, entonces parece que [el perímetro] tendría una desviación de como máximo cuatro décimas… mientras que estos…, el producto tiene una desviación de como máximo una décima de 8,7 más una décima de 19,0… Entonces es más grande".

  - "Conectando con la enseñanza" es efectivo para desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza.

2: Conexiones matemáticas invertidas

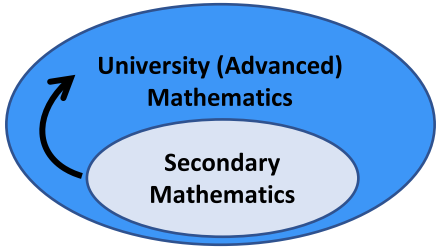
Incluyendo prácticas matemáticas

Conexiones matemáticas

Wasserman, N., & Galarza, P. (2018). Exploring an instructional model for designing modules for secondary mathematics teachers in an abstract algebra course. In N. Wasserman (Ed.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers,* Research in Mathematics Education (pp. 335-361). Cham, Switzerland: Springer.

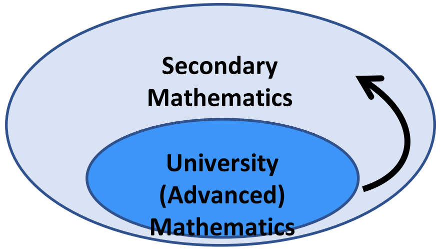
Conexiones de contenido "típicas"

1. Klein's (1932) "Matematicas elementales desde un punto de vista avanzada"
   - Las Matemáticas Avanzadas son más generales y abstractas; La Matemática Secundaria es una instancia

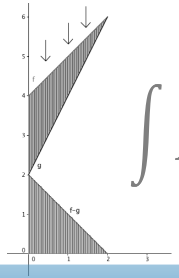


Conexiones de contenido "invertidas"

2. Conexiones de práctica disciplinaria (proceso), por ejemplo, "definir", "probar"
   - Matemáticas Avanzadas es una instancia de práctica matemática, que forma parte de Matemáticas Secundarias



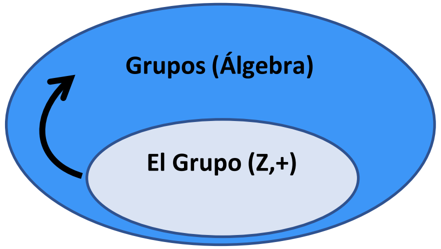
3. Otras conexiones de contenido "invertidas" que sitúan las matemáticas avanzadas como una instancia, por ejemplo, las reglas integrales como una instancia de transformaciones que preserva del área



$$\int f - g = \int f - \int g$$

Conexiones Matemáticas

Conexiones de contenido "típicas"



- Agregar un ejemplo concreto de un Grupo, (Z,+) (de matemáticas escolares), mejora la comprensión de los Grupos (de matemáticas avanzadas)
- Posiblemente también ayude a situar las matemáticas escolares, (Z,+), dentro de esta estructura más amplia, ¡*pero el enfoque principal es el contenido de matemáticas avanzadas*!

Conexiones de contenido “invertidas”

(que incluyen Prácticas Disciplinarias)

- Agregar un ejemplo concreto de Definir, **ε-δ** (de matemáticas avanzadas), mejora la comprensión de Definir de manera más general (una práctica que también se estudia en las matemáticas escolares)
- ¡*El enfoque principal está en el contenido de matemáticas de la escuela*!

Módulo 9: Resumen

- **“Atención al rango” es una práctica matemática**
  - Hay un "dominio" (o conjunto de objetos) para el cual una declaración es verdadera, o la medida en que un argumento subyacente podría ser válido en un entorno diferente
  - **Análisis Real:** Demostración de la regla de potencias para derivadas: Si $f(x)=x^r$ para algún número real distinto de cero r, entonces $f'(x)=rx^{r-1}$.

Investigación

Wasserman, N., Weber, K., Fukawa-Connelly, T., & McGuffey, W. (2019). Designing advanced mathematics courses to influence secondary teaching: Fostering mathematics teachers' 'attention to scope'. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(4), 379-406.

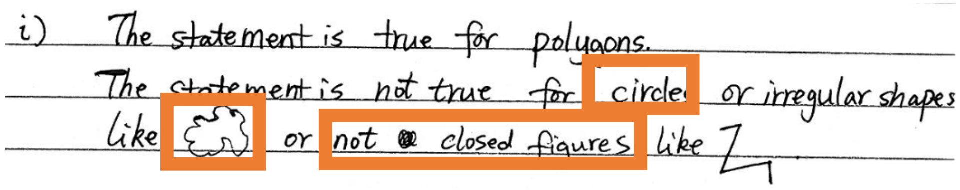
- Wasserman et al. (2019)
  - Dio el curso ULTRA (Iteración 1) con n = 31 maestros en formacion y en servicio (PISTs)
  - El trabajo de los estudiantes grabado en audio y video en partes de las tareas en clase
    - Los estudiantes trabajaron frecuentemente en grupos en clase.
  - Respuestas de tareas fueras de la clase recopiladas (individuales)
  - Tarea de reflexión escrita semanal recopilada sobre las implicaciones en la enseñanza (individuos)

Hallazgos

Wasserman, N., Weber, K., Fukawa-Connelly, T., & McGuffey, W. (2019). Designing advanced mathematics courses to influence secondary teaching: Fostering mathematics teachers' 'attention to scope'. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(4), 379-406.

- Wasserman et al. (2019)
  - **Reclamacion: Los profesores en formación/en servicio (PISTs) aumentaron la atención que prestaban a las ideas de las conexiones matemáticas invertidas y las valoraron para la enseñanza.**
    - Específicamente con "atención al rango":
      - Inicialmente, alrededor del 40% de los estudiantes asistían a esta práctica matemática en un contexto secundario; luego, en el problema del perímetro, todos lo hicieron
      - 26 de 27 reflexiones escritas expresaron el sentido que encontraron que esto era valioso para su enseñanza
  - "Conexiones matemáticas invertidas" son efectivas para desarrollar conocimientos matemáticos para la enseñanza

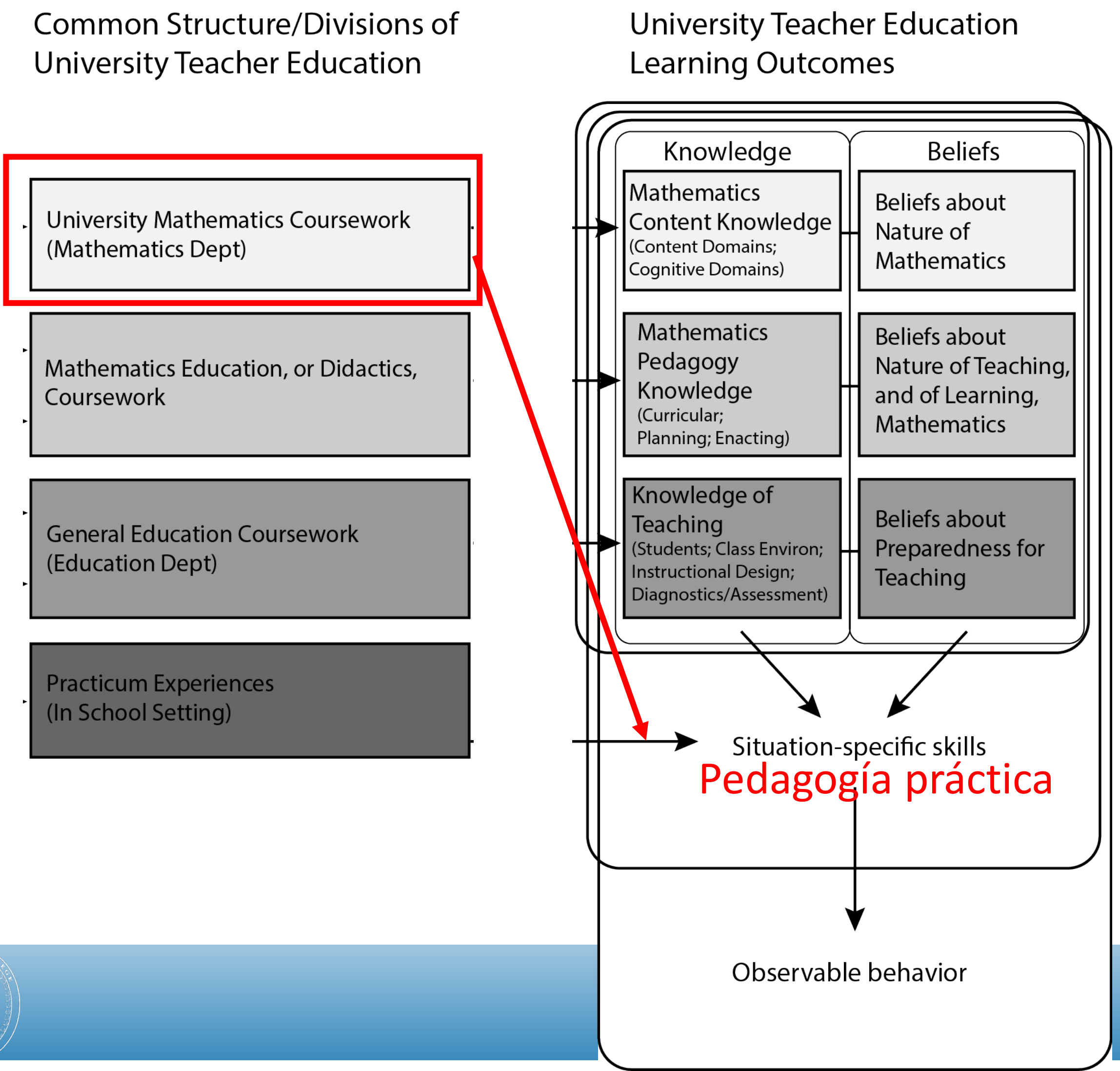
<u>Perimeter Statement:</u>
The perimeter is just the sum of all the side lengths



3: Prácticas Matemáticas Pedagógicas

PMP.1 y “atención al rango”

Prácticas Matemáticas Pedagógicas

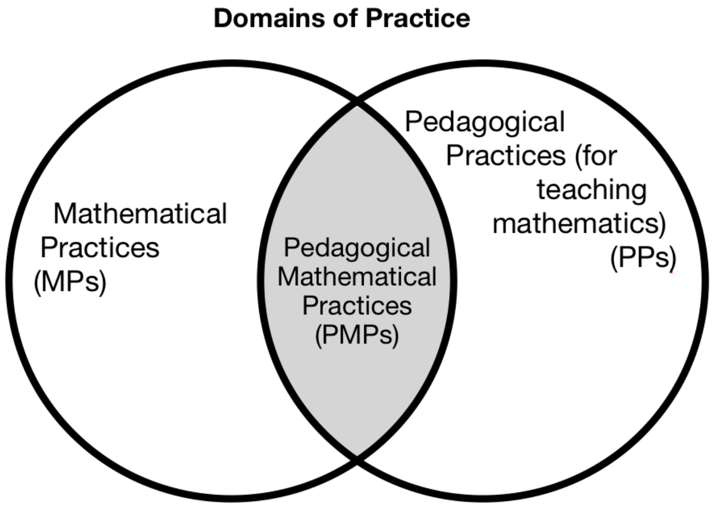


- Pero, ¿cómo podría discutirse la “pedagogía práctica” en un curso avanzado de matemáticas?

Prácticas Matemáticas Pedagógicas

Wasserman, N. (in press). Re-exploring the intersection of mathematics and pedagogy. *For the Learning of Mathematics, XX*(X), XXX.

- Shulman (1986): PCK como intersección de dominios de conocimiento – de matematicas, y de pedagogicas
- Prácticas Matemáticas Pedagógicas (PMPs): intersección de dominios de práctica (Wasserman, en prensa)
  - Las **prácticas matemáticas** son aquellas actividades en las que los matemáticos participan regularmente (Cuoco et al., 2005; Rasmussen et al., 2005; SMPs)
  - Las **prácticas pedagógicas** (para enseñar matemáticas) son aquellas actividades en las que los profesores de matemáticas participan regularmente (NCTM, 2014; HLPs)
  - Las **PMPs** son los tipos de prácticas que son comunes tanto a los matemáticos como a los profesores de matemáticas, es decir, los tipos de acciones, hábitos, líneas de razonamiento, etc., en los que los matemáticos y los profesores de matemáticas participan regularmente.



Prácticas Matemáticas Pedagógicas

Objetivos pedagógicos (PMPs) de ULTRA (no es una lista exhaustiva):

1. Reconocer y revisar suposiciones y restricciones o limitaciones matemáticas **("Atención al rango")**
2. Considere y use casos especiales para probar e ilustrar ideas matemáticas.
3. Exponer la lógica como fundamento de la interpretación matemática
4. Usa objetos más simples para estudiar objetos más complejos.
5. Evite dar reglas sin una explicación matemática que las acompañe.
6. Busca múltiples explicaciones

ULTRA Módulo 9

“Atención al rango”

Módulo 9: Resumen

- **Contenido de análisis real:** varias demostraciones de reglas de derivadas (regla de la potencia, regla del producto, regla del cociente (recíproco), regla de la función inversa, regla de la cadena)
  - Si $f(x)=x^r$ para algún número real distinto de cero r, entonces $f'(x)=rx^{r-1}$.
  - Si f y g están definidos en A y ambos son derivables en algún punto c en A, entonces:
    - i) $(fg)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$
    - ii) $(f/g)'(c)=[g(c)f'(c)-f(c)g'(c)]/[g(c)]^2$

Construyendo desde la práctica

Situación Pedagógica: ‘Explicaciones’

El Sr. Ryan enseña todo, desde pre-álgebra hasta cálculo. Las siguientes declaraciones provienen de instantáneas de sus clases en diferentes momentos del año.

En una clase de álgebra, el Sr. Ryan está explicando los exponentes:

“Los exponentes son simplemente multiplicaciones repetidas.”

En una clase de cálculo, el Sr. Ryan está explicando la regla de la potencia:

“Para sacar la derivada, baja el exponente al frente y resta uno del exponente.”

Análisis Real

Demostraciones de derivadas

- **Demostración.** ¿Para qué conjuntos de números para la potencia n (N,Z,Q,R) es válida esta demostración? Si no es válido para un conjunto, ¿en qué paso se descompone el argumento?

- Posteriormente, introdujo pruebas de las reglas del producto y del cociente (recíproco), y que la regla de la potencia se cumple para **Z**
- Luego, presentó pruebas de las reglas de la cadena y de la función inversa, y que la regla de la potencia se cumple para **Q** y **R**

Prove: For $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$.

i. The difference of powers formula states that, given a real number, c:

$$\boxed{x^n - c^n = (x-c)\left(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot c + \ldots + x\cdot c^{n-2} + c^{n-1}\right)}$$

ii. According to the definition, $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, when that limit exists. Substituting in the given function, for all $x \neq c$, we get:

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot c+\ldots+x\cdot c^{n-2}+c^{n-1}\right)}{x-c}=$$

$$=\lim_{x\to c}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot c+\ldots+x\cdot c^{n-2}+c^{n-1}\right)$$

iii. Therefore, since there are $\boxed{n \text{ terms}}$ on the right hand side, each of which approach c^{n-1} as x approaches c, $f'(c)=n\cdot c^{n-1}$ which is to say that $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

Ideas claves

- Los conocimientos pedagógicos clave provinieron de la práctica matemática de "atender al rango", que se hizo explícito a partir de la secuencia de demostraciones. (*entendimiento matematica poderoso*)
- Luego se aplicó la práctica matemática de atención al rango para dejar claro cómo se convierte en una práctica pedagógica para la enseñanza de las matemáticas. (*entendimiento pedagogica poderoso*)
  - Específicamente, que ambas declaraciones del Sr. Ryan tienen limitaciones matemáticas en términos de su alcance.
- ¿Cómo se puede hablar de pedagogía en un curso avanzado de matemáticas?
  - Las PMPs indican cuándo la práctica matemática informa la práctica docente

Investigación

Wasserman, N., & McGuffey, W. (2021). Opportunities to learn from (advanced) mathematical coursework: A teacher perspective on observed classroom practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 52*(4), 370-406.

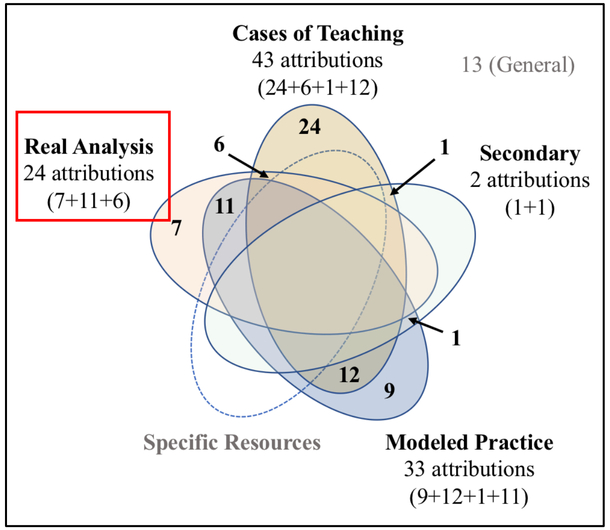
- Wasserman & McGuffey (2021)
  - De 31 PISTs (de la iteración 1), seguimos a n=6 a sus aulas de secundaria el año siguiente
    - Enseñaron una variedad de cursos: Álgebra, Geometría, Precálculo, Cálculo
  - Dirigido a observar a cada maestro 6 veces (para una lección)
    - n=34 observaciones de clase totales
  - Entrevista de recuerdo post-estimulada con maestros después de cada observación - basada en varios "momentos de enseñanza" de esa clase: ¿qué estaban haciendo y por qué?
  - Análisis
    - n=167 momentos de enseñanza en los que los profesores discutieron algo del curso ULTRA como un evento influyente en relación con su acción
      - Identificó la acción de los maestros en ese momento, con base en la observación y la descripción del maestro; la mayoría de momentos ejemplificaron nuestros PMPs
  - De 148 de estos momentos de enseñanza, n=199 atribuciones a aspectos específicos del curso ULTRA (por ejemplo, Análisis Real, Situaciones Pedagógicas, etc.)

Hallazgos

Wasserman, N., & McGuffey, W. (2021). Opportunities to learn from (advanced) mathematical coursework: A teacher perspective on observed classroom practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 52*(4), 370-406.

- Wasserman & McGuffey (2021)
  - **Reclamacion: Los futuros docentes/docentes en servicio (PISTs) i) incorporaron las PMPs en su propia enseñanza; ii) las atribuciones que dieron para incorporar PMPs se cruzaron, a veces solo con aspectos matemáticos del curso ULTRA (no las discusiones sobre la enseñanza)**
    - Específicamente con PMP.1 ("atención al rango"):
      - 6 maestros (en 34 lecciones) participaron en PMP.1 en 84 "momentos de enseñanza"
      - En 24 "momentos de enseñanza" su atribución fue a actividades puras de Análisis Real (no discusiones de enseñanza secundaria, sino actividades de RA)
  - Las "PMPs" son efectivos como pedagogía práctica: un puente entre conocimientos de las matemáticas avanzadas y las acciones de los docentes

PMP.1



En resumen

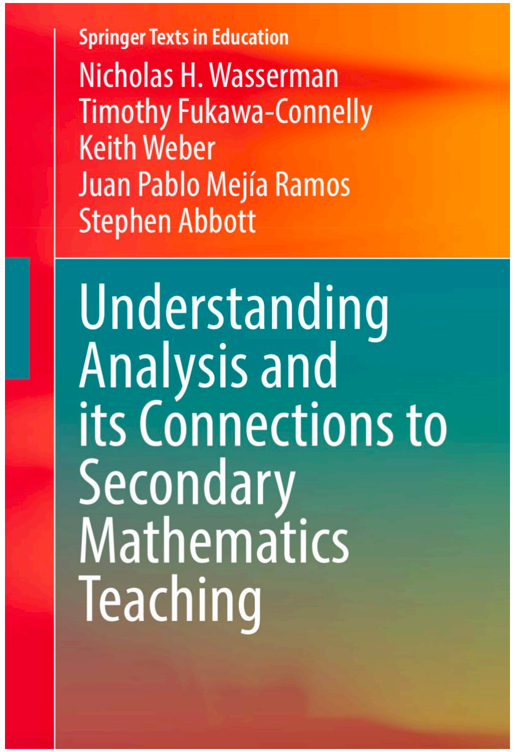
- **Pregunta impulsora:** ¿Existen formas de impartir cursos avanzados de matemáticas que puedan ser una preparación más eficaz para los profesores de secundaria?
- Estos tres componentes (conexión con la enseñanza, conexiones matemáticas invertidas y PMPs) parecían ser efectivos en términos de mejorar la formación de docentes de secundaria a través de cursos de matemáticas.

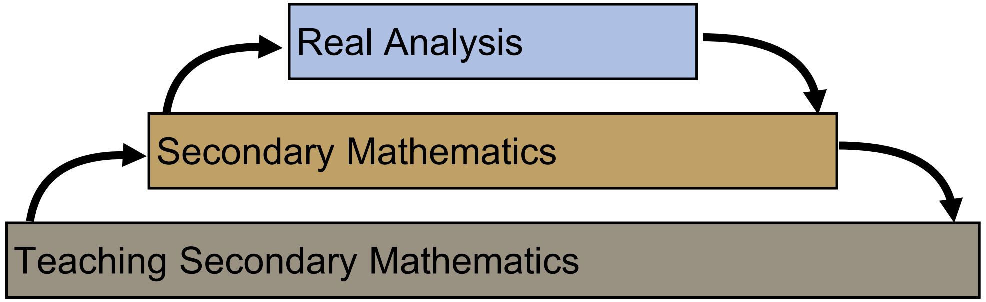
Gracias!

Nick Wasserman

wasserman@tc.columbia.edu

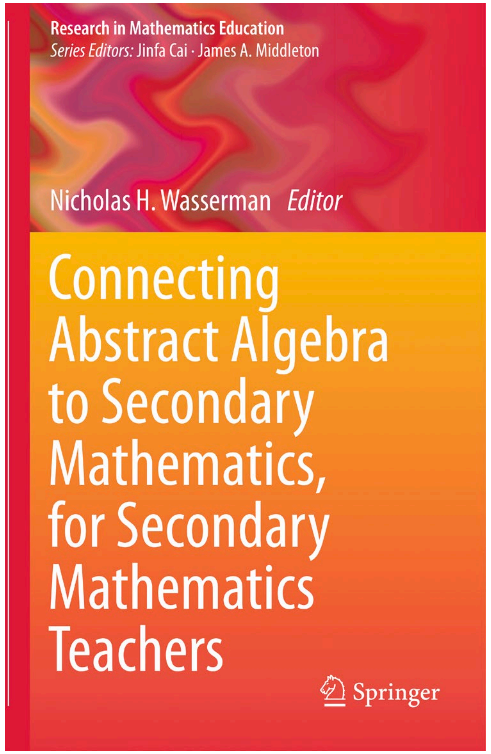
Análisis Real





http://ultra.gse.rutgers.edu

Álgebra Abstracta



https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-89198-5

https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-99214-3